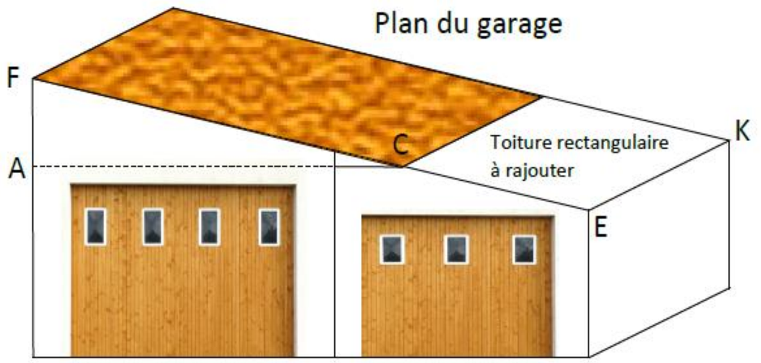
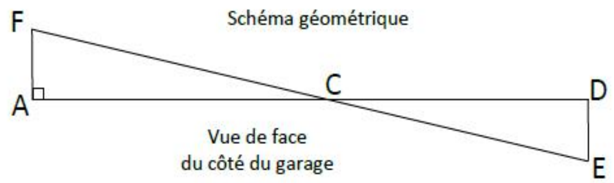
Mathématiques 3e – Devoir n°4 *(maison)* le 14 octobre 2011).

Objectifs : Cosinus, Thalès, équations, calcul littéral.

Exercice 1:





M. Bricolo veut accoler à son garage, déjà construit pour une caravane, un deuxième garage.
Pour cela, il faut prolonger la toiture. M.Bricolo a fait des mesures qu'il a indiquées sur sa feuille, puis il a fait un schéma plus géométrique *(mais pas à l'échelle)* afin d'effectuer ses calculs.
Les figures ne sont pas en vraie grandeur, on a :

CF = 7,5 m ; AC = 4,5 m ; CD = 3 m ; CE = 5 m et EK = 6 m.

1) Déterminer l'arrondi au degré de l'angle ACF au dixième de degré. Sachant que l'étanchéité de la toiture est garantie si cet angle est supérieur à 35°, M. Bricolo pourra-t-il être remboursé par l'assurance en cas de problème ?

2) Calculer la longueur AF.

3) Démontrer que les droites (AF) et (DE) sont parallèles. En déduire la longueur DE.

4) Sachant que le deuxième garage aura une profondeur de 6 m, quelle est l'aire exacte de la partie de toiture à ajouter à la toiture d'origine ?.

Exercice 2:

Résoudre les équations :

1) $7x + 8 = 0$

2) $-4x - 5 = 2x + 3$

3) $4x + 5(7-3x) = -13 -(17 - 2x)$

4) $4x + 3(7 - 2x) = 8 -[2 -(5x+4)]$

Exercice 3:

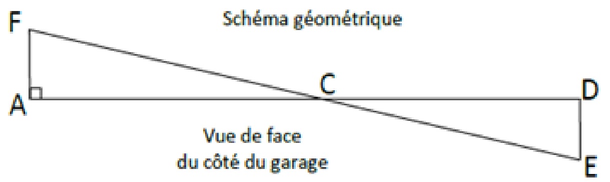
On donne l'expression : $D = (5x +1)(2x - 7) - (5x +1)^2$.

1. Développer et réduire D.
2. Développer et réduire $E = (5x +1)(-3x -8)$
3. Que peut-on en déduire pour D et E ?
4. A quelles conditions un produit de deux facteurs est-il nul ? $A \times B = 0$ si …………ou…………
5. En déduire la résolution de l'équation $D = 0$

Question Bonus *(2 pt)* : Quel est le chiffre des unités de 17^{35} ?

Correction du Devoir.

Exercice 1 : *(7 pt)*



1) Déterminer l'arrondi en degré de l'angle ACF au dixième de degré. Sachant que l'étanchéité de la toiture est garantie si cet angle est supérieur à 35°, M. Bricolo pourra-t-il être remboursé par l'assurance en cas de problème ?.

Dans le triangle ACF, rectangle en A :

Cos ACF = $\dfrac{\text{côté adjacent}}{hypoténuse} = \dfrac{CA}{CF} = \dfrac{4{,}5}{7{,}5} = \dfrac{45}{75} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$

ACF = $\text{Cos}^{-1}(0{,}6)$ = 53,13... soit **53,1°** *au dixième près*

M. Bricolo sera remboursé par l'assurance en cas de problème car 53° > 35° ***(1,5 pt)***

2) Calculer la longueur AF.

A l'aide du théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ACF, on a :

$CF^2 = CA^2 + AF^2$; $7{,}5^2 = 4{,}5^2 + AF^2$; $7{,}5^2 - 4{,}5^2 = AF^2$; $56{,}25 - 20{,}25 = AF^2$; $36 = AF^2$;

AF = V(36) = **6 m** ***(1,5 pt)***

3) Démontrer que les droites (AF) et (DE) sont parallèles. En déduire la longueur DE.

Les points F,C,E et A,C,D sont alignés dans le même ordre.

Si $\dfrac{CA}{CD} = \dfrac{CF}{CE}$ alors les droites (AF) et (DE) sont parallèles (*réciproque de Thalès*).

D'une part : $\dfrac{CA}{CD} = \dfrac{4{,}5}{3} = \underline{1{,}5}$ et d'autre part $\dfrac{CF}{CE} = \dfrac{7{,}5}{5} = \underline{1{,}5}$

Comme $\dfrac{CA}{CD} = \dfrac{CF}{CE} = 1{,}5$, <u>les droites (AF) et (DE) sont parallèles (*réciproque de Thalès*).</u> ***(1,5 pt)***

Par suite, on a donc une configuration de Thalès (en « papillon »).
Les droites (EF) et (DA) sont sécantes en C.
Les droites (AF) et (DE) sont parallèles.
D'après le théorème direct de Thalès, on a :

$\dfrac{CA}{CD} = \dfrac{CF}{CE} = \dfrac{AF}{DE}$ soit $\dfrac{4{,}5}{3} = \dfrac{7{,}5}{5} = \dfrac{6}{DE}$ et DE = (6 x 5)/7,5 = **4 m** ***(1,5 pt)***

4) Sachant que le deuxième garage aura une profondeur de 6 m, quelle est l'aire exacte de la partie de toiture à ajouter à la toiture d'origine ?.

L'aire de la nouvelle toiture est celle d'un rectangle = CE x EK = 5 x 6 = **30 m²** ***(1 pt)***

Exercice 2 : Résoudre les équations. ***(6,5 pt)***

Pour cet exercice, on pourra utiliser MagiCalculator pour vérifier ses résultats et détecter les erreurs en cas de résultat inexact...

1) $7x + 8 = 0$

$7x + 8 \mathbf{-8} = 0 \mathbf{-8}$

$7x = -8$

$x = \mathbf{-8/7}$ ***(1 pt)***

2) $-4x - 5 = 2x + 3$

$-4x - 5 \mathbf{+4x} = 2x + 3 \mathbf{+4x}$ *(on « annule » les x à gauche. On aurait pu le faire à droite !)*

$- 5 = 6x + 3$

$- 5 \mathbf{-3} = 6x + 3 \mathbf{-3}$ *(on « annule » le nombre « +3 » à droite, pour isoler les x)*

$- 8 = 6x$

$- 8/6 = x$ ou $x = \mathbf{-4/3}$ ***(1,5 pt)***

3) $4x + 5(7-3x) = -13 -(17 - 2x)$

$4x + (35-15x) = -13 -17 + 2x$

$4x + 35-15x = -13 -17 + 2x$

$-11x + 35 \mathbf{-2x} = -30 + 2x \mathbf{-2x}$ *(on « annule » les x à droite. On aurait pu le faire à gauche !)*

$-13x + 35 = -30$

$-13x + 35 \mathbf{-35} = -30 \mathbf{-35}$ *(on « annule » le nombre « +35 » à gauche)*

$-13x = -65$

$x = (-65)/(-13)$

$x = \mathbf{5}$ ***(2 pt)***

4) $4x + 3(7 - 2x) = 8 -[2 -(5x +4)]$

$4x + (21- 6x) = 8 -[2 -5x -4]$

$4x + 21- 6x = 8 -2 +5x +4$

$-2x + 21 = 10 +5x$

$-2x + 21 \mathbf{-5x} = 10 +5x \mathbf{-5x}$ *(on « annule » les x à droite)*

$-7x + 21 = 10$

$-7x + 21 \mathbf{-21} = 10 \mathbf{-21}$ *(on « annule » le nombre « +21 » à gauche)*

$-7x = -11$

$x = (-11)/(-7)$

$x = \mathbf{11/7}$ ***(2 pt)***

Exercice 3: *(6,5 pt)*

On donne l'expression : $D = (5x +1)(2x - 7) - (5x +1)^2$.

1. Développer et réduire D.

   $D = (10x^2 -35x +2x -7) - (25x^2 +1 +10x)$

   $D = 10x^2 -35x +2x -7 -25x^2 -1 -10x$

   $D = \mathbf{-15x^2 -43x -8}$ ***(2 pt)***

2. Développer et réduire $E = (5x +1)(-3x -8)$

   $E = -15x^2 -40x -3x -8 = \mathbf{-15x^2 -43x -8}$ ***(1 pt)***

3. Que peut-on en déduire pour D et E ?

   D et E sont égales *(équivalentes)* ***(0,5 pt)***

4. A quelles conditions un produit de deux facteurs est-il nul ? $A \times B = 0$ si ....ou............

   Un produit de facteurs est nul si l'un au moins de ses facteurs est nul.

A x B = 0 si **A = 0** **ou** **B = 0** ***(1 pt)***

5. En déduire la résolution de l'équation D = 0 ***(2 pt)***

D = 0 revient à E = 0 *(puisque D = E)*

E = 0 équivaut à (5x +1)(-3x -8) = 0 qui est un produit de deux facteurs nul.

Ce produit sera nul si (5x +1)= 0 ou bien (-3x -8)= 0.

En résolvant chacune de ces deux équations (facile) on obtient x = **-1/5** ou x = **-8/3**

Question Bonus ***(2 pt)*** : Quel est le chiffre des unités de 17^{35} ?

Il y a plusieurs façons d'aborder ce problème...

Sans utiliser les formules sur les puissances, il faut multiplier le chiffre 7 trente-cinq fois par lui-même.
Il y a alors un "cycle" (on dit période en Maths) dans les derniers chiffres obtenus.

$7 = 7^1 = \underline{7}$;

$7 \times 7 = 7^2 = 4\underline{9}$;

$7 \times 7 \times 7 = 7^3 = 34\underline{3}$;

$7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^4 = 240\underline{1}$;

$7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^5 = 16\,80\underline{7}$ qui se termine par 7 également, après 4 multiplications par 7.

Ainsi, **7^6** se terminera par **9** ; **7^7** se terminera par **3** ; **7^8** se terminera par **1** et **7^9** se terminera par **7**; Etc...

Donc: **$7^1, 7^5, 7^9, 7^{13}, 7^{17}, 7^{21}, 7^{25}, 7^{29}, 7^{33}, \ldots, 7^{(1+4n)}$**, se terminent par un **7**

De même, **$7^2, 7^6, 7^{10}, 7^{14}, 7^{18}, 7^{22}, 7^{26}, 7^{30}, 7^{34}, \ldots, 7^{(2+4n)}$**, se terminent par un **9**

De même, **$7^3, 7^7, 7^{11}, 7^{15}, 7^{19}, 7^{23}, 7^{27}, 7^{31}, 7^{35}, \ldots, 7^{(3+4n)}$**, se terminent par un **<u>3</u>**

==

On pourrait aussi utiliser les formules de puissances $(a^n)^p = a^{(n \times p)}$; ainsi $7^{35} = (7^5)^7$

Comme 7^5 se termine par un 7, il faut le multiplier 7 fois par lui-même, ce qui donne un <u>3</u> comme chiffre des unités

==